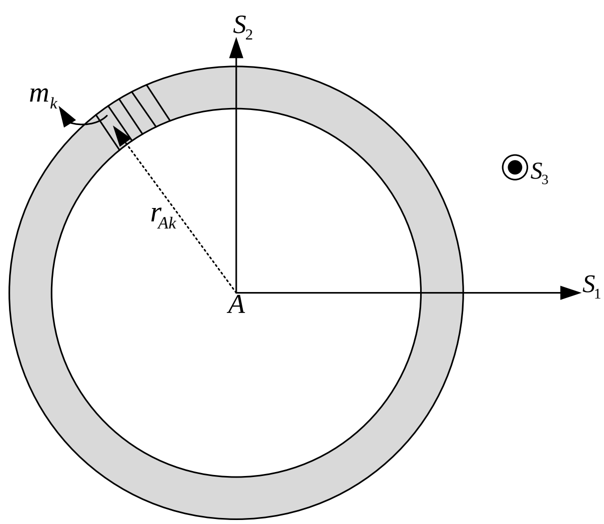
مبحث بیست و سوم(مباحث اندازه حرکت وضربه، قانون بقای اندازه حرکت، انرژی جنبشی و قانون برابری کار نیروی برآیند و تغییرات انرژی جنبشی)

تکلیف از مبحث ماتریس ممان اینرسی)

۱- با فرض $^{s}r_{Ak}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ماتریس ممان اینرسی $^{s}I_A$ را بدست آورید.

۲- چرخی به صورت زیر در نظر بگیرید. فرض کنید جرم چرخ M و شعاع آن R باشد. نقطه‌ی A را در مرکز آن در نظر بگیرید. دستگاه S را مطابق شکل روی آن بنا کنید. فرض کنید چرخ از المان کوچک k مطابق شکل تشکیل شده است. ماتریس ممان اینرسی($^{s}I_A$) را بدست آورید.



توجه داشته باشید که با کوچک اختیار نمودن بخش‌های k می‌توان جمعِ موجود در رابطه‌ی ماتریس ممان اینرسی را به انتگرال تبدیل نمود.

♦

در بسیاری از مسائل مرتبط با جابجایی علاقه‌مندیم بدون توجه به تعاملات رخ داده، به نتیجه‌ی کلی پس از بازه‌ی زمانی مشخصی بپردازیم. به عنوان مثال می‌خواهیم بدانیم پس از برخورد دو جسم چه اتفاقی برای آن دو جسم می‌افتد و حرکت‌هایشان به چه صورت می‌شود. پیش‌تر که به نیرو به صورت لحظه‌ای نگاه می‌کردیم برای ذره i ام یک جسم از رابطه‌ی زیر از دید یک دستگاه خاص استفاده می‌کردیم.

$$F_i = ma_i$$

و برای کل یک جسم نیز از رابطه‌ی زیر بهره می‌بردیم.

$$F_{\text{خارجی}} = Ma_{cm}$$

اما حال که می‌خواهیم به نیروها در بازه‌ی زمانی پیوسته‌ی خاصی بنگریم، برای بررسی عبارت سمت چپِ رابطه‌ی بالا، کافی است نیروهای خارجی رابطه‌ی بالا را برای یک جسم، در آن فاصله‌ی زمانی جمع نموده و یا به صورت زیر انتگرال‌گیری کنیم:

$$\int_{t_i}^{t_f} F_{\text{خارجی}}\, dt$$

در رابطه‌ی بالا می‌توان F را برداری در نظر گرفت و یا آن را از دید دستگاهی خاص به صورت عددی بیان نمود.

♦

همانطور که می‌دانید برای محاسبه‌ی انتگرال معین، ابتدا مقدار انتگرال نامعین را بدست می‌آوردید. فرض کنید انتگرال نامعین x(t) همان y(t) باشد.

$$\int x(t)\, dt = y(t)$$

سپس براساس انتگرال نامعین x(t) مقدار انتگرال معین آن را به صورت زیر محاسبه می‌کردید.

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt = y(t_2) - y(t_1)$$

♦

حال فرض می‌کنیم مقدار انتگرال نامعین F(t) مقدار P(t)باشد. آن‌گاه:

$$\int_{t_i}^{t_f} F_{\text{ext}}\,(t) dt = P\big(t_f\big) - P(t_i) = \Delta P = J$$

در رابطه‌ی بالا $P(t_i)$ اندازه‌ی حرکت ابتدایی و $P\big(t_f\big)$ اندازه‌ی حرکت پایانی نامیده می‌شود. همچنین J ضربه یا Impulse نامیده می‌شود. بر اساس همین رابطه نیز می‌گویند اگر مجموع نیروهای خارجی وارد بر یک مجموعه از جسم‌ها در فاصله‌ی زمانی‌ای مشخص صفر باشد، تغییر اندازه‌ی حرکت این مجموعه در این بازه‌ی زمانی صفر است.

مطابق رابطه‌ی بالا داریم:

$$F_{ave} = \frac{J}{\Delta t}$$

که در آن F_{ave} نیروی متوسطی است که در بازه‌ی زمانی Δt به جسم وارد می‌شود.

حال به بررسی و انتگرال‌گیری از طرف راست عبارت $F_{ext} = Ma_{cm}$ می‌پردازیم. داریم:

$$M\int_{t_i}^{t_f} a_{cm}\, dt = M\big(v_{cm}(t_f) - v_{cm}(t_i)\big) = M\Delta v_{cm}$$

همانطور که از رابطه‌ی بالا مشخص است، با بررسی اتفاقات ابتدا و انتهای یک بازه‌ی زمانی نمی‌توان به شتاب دست یافت. همچنین طبق رابطه‌ی زیر که با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه‌ی $F_{\text{ext}} = Ma_{cm}$ حاصل شده است، با دانستن سرعت مرکز جرم در لحظه‌ی t_i و در اختیار داشتن J و M، می‌توان سرعت مرکز جرم را در لحظه‌ی t_f بدست آورد.

$$J = M\big(v_{cm}(t_f) - v_{cm}(t_i)\big)$$

اگر بخواهیم کلیه‌ی ذرات را مدنظر قرار دهیم، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_f} (m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots)\, dt &= m_1\left(v_1(t_f) - v_1(t_i)\right) + m_2\left(v_2(t_f) - v_2(t_i)\right) + \cdots \\ &= m_1\Delta v_1 + m_2\Delta v_2 + \cdots \\ &= \big(m_1v_1(t_f) + m_2v_2(t_f) + \cdots\big) - \big(m_1v_1(t_i) + m_2v_2(t_i) + \cdots\big) \\ &= P(t_f) - P(t_i)\end{aligned}$$

مثال) در این مثال می‌خواهیم برخورد دو جسم را در نظر بگیریم که پس از برخورد به یکدیگر ملحق می‌شوند. فرض کنید جسمی به جرم m_1 و با سرعت قبل از برخورد $v_1(t_i)$ ، به جسم بزرگتری برخورد کرده و به آن ملحق می‌شود. فرض کنید به بررسی روابط از دید دستگاه زمین و نقطه‌ای روی آن می‌پردازیم. فرض کنید جسم بزرگتر به جرم m_2 پیش از برخورد از دید دستگاه زمینی ساکن بود($v_2(t_i) = 0$) بنابراین:

$$P(t_i) = m_1v_1(t_i)$$

پس از برخورد این دو جسم یکی شده و سرعت‌هایشان برابر می‌شودبا $v(t_f)$ (برخورد کاملاً غیر الاستیک). آن‌گاه:

$$P(t_f) = m_1 v_1(t_f) + m_2 v_2(t_f) = (m_1 + m_2) v(t_f)$$

حال اگر فرض کنیم مجموع نیروهای خارجی وارد بر این دو جسم در این فاصلهٔ زمانی صفر باشد، باید ΔP نیز صفر گردد. و به این ترتیب می‌توان $v(t_f)$را محاسبه نمود:

$$\Delta P = 0 \rightarrow P(t_f) - P(t_i) = 0 \rightarrow (m_1 + m_2) v(t_f) - m_1 v_1(t_i) = 0 \rightarrow v(t_f) = \frac{m_1 v_1(t_i)}{(m_1 + m_2)}$$

که البته اگر m_2 خیلی بزرگتر از m_1باشد، تقریباً $v(t_f)$ صفر می‌گردد.

در مثال‌های دیگر، مانند برخورد دو بار الکتریکی قرار گرفته در یک میدان مغناطیسی ، به دلیل اینکه نیروهای خارجی وارد بر دو بار صفر نیست، تغییر اندازه‌ی حرکت نیز مخالف صفر است.

همانطور که می‌دانید برای تحلیل کامل حرکت باید روابط نیرو و روابط گشتاورِ نیرو بررسی گردند. برای گشتاور نیرو نیز کلیه روابط اندازه‌ی حرکت دورانی مشابه روابط اندازه‌ی حرکت خطی بدست آمده برای نیرو است. تنها به جای جرم‌ها از ممان اینرسی استفاده می‌شود و به جای سرعت‌های خطی، سرعت‌های دورانی قرار می‌گیرند.

در ادامه می‌خواهیم به تعاملات بین اجسام، عددی اختصاص دهیم، به نحوی که این عدد بیانگر این باشد که جسمی که در حال جابجا شدن است چقدر می‌تواند جسم‌های دیگر را جابجا کند. در این صورت اگر آن عدد را از این جسم بگیریم او را خسته کرده و او نمی‌تواند اجسام دیگر را جابجا کند یا تعاملاتی با آن‌ها داشته باشد. این عدد بیانگر *انرژی جنبشی(حرکتی)* جسم است. با این تعریف دو جسمی که در فاصله‌ای مشخص نسبت به یکدیگر ساکن قرار گرفته‌اند، نسبت به هم خسته هستند مگر اینکه حرکتی کنند.

پس به نظر می‌رسد که این تواناییِ اعمالِ نیرو هم با بزرگیِ سرعتش و هم بزرگیِ جرمش تناسب دارد و لذا با استفاده از حاصل‌ضربی از این دو می‌توان در مورد مقدار انرژی جنبشیِ آن قضاوت کرد.

بنابراین مثلاً می‌توان به گونهٔ زیر نوشت:

$$\text{انرژی حرکتی یا جنبشی} = m\|v\|$$

اما به دلایل ریاضیاتی و برای سادگی محاسبات که در ادامه نشان داده می‌شود، انرژی جنبشی را به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$\text{انرژی حرکتی یا جنبشی} = E_{\text{جنبشی}} = E_k = \frac{1}{2} m\|v\|^2$$

حال برگردیم به نیرو:اگر جسمی دارای مقداری مشخصی انرژی جنبشی باشد که از رابطه‌ی بالا محاسبه می‌شود و در حال دریافتِ نیرو از دیگران است، چه مقدار انرژی جنبشی‌اش در حال تغییر است. برای پاسخ به این سوال از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_1^2 F_{ext} \cdot dr = \Delta E_k$$

که به این عبارت می‌گوییم کاری که نیرویِ F_{ext} در این فاصله انجام داده است روی آن جسم! روشن است که ما این را طوری تعریف کرده‌ایم که نهایتاً کاری که نیروی F_{ext} در فاصله‌ی $r_2 - r_1$ انجام می‌دهد با تغییرات انرژی جنبشی در این فاصله برابر گردد. توجه داشته باشید که کل رابطه‌ی بالا از دید دستگاهی خاص باید نوشته شود. اگر رابطه‌ی انرژی جنبشی شامل ضریب $\frac{1}{2}$ و توان 2 نبود، رابطه‌ی بالا به این سادگی قابل تعریف نبود.

برای اثبات رابطه‌ی انرژی جنبشی، فرض می‌کنیم F_{ext} باعث شده جسم m شتابی به اندازه‌ی a پیدا کند. اگر مسیر حرکت این جسم و شتاب آن مطابق شکل زیر باشد، می‌توانیم شتاب را به دو مولفه‌ی مماس بر مسیر حرکت و عمود بر آن تجزیه کنیم. قبلاً نیز اشاره کرده بودیم که مولفه‌ی مماسی شتاب (a_T)، اندازه‌ی سرعت را تغییر می دهد و مولفه‌ی عمودی جهت سرعت را تغییر می‌دهد. بنابراین شتاب مماسی مشتق اندازه‌ی سرعت است:

$$a_T = \frac{d\|v\|}{dt} = \|\dot{v}\|$$

به این ترتیب معنی ضرب داخلی در تعریف بالا روشن می‌شود که برای این بوده که فقط به مؤلفه‌ای از نیرو بپردازد که باعث تغییر اندازۀ سرعت می‌گردد و ضرب داخلیِ دو بردار aو dr می‌شود ضرب دو عددِ $\|a_T\|$و $\|dr\|$

بنابراین:

$$\int_1^2 F_{ext} \cdot dr = m\int_1^2 \frac{d\|v\|}{dt} . \|dr\| = m\int_1^2 \frac{d\|v\|}{dt} \|dr\| = m\int_1^2 d\|v\| \frac{\|dr\|}{dt} = m\int_1^2 \|v\| d\|v\|$$
$$= m \times \frac{1}{2}\|v\|^2\Big)_1^2 = \frac{1}{2}m(\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2)$$

از این ساده‌سازی‌ها، دلیلِ ضریب $\frac{1}{2}$ و توان 2نیز در انرژی جنبشی مشخص شد.

ضمناً توجه دارید که در ساده‌سازی‌هایِ بالا از حقیقت زیر نیز استفاده شده است:

$$\|v\| = \frac{\|dr\|}{dt}$$

نکته‌ی دیگری که لازم است بدانید این است که به برخوردی برخوردِ الاستیک گفته می‌شود که انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد تغییری ن‌کند ولی در برخورد غیر الاستیک این انرژی تغییر می‌کند. با این تعریف برخورد شهاب‌سنگ به زمین برخوردی کاملاً غیر الاستیک(پلاستیک) است. در برخورد الاستیک گویا انرژی جنبشی (به شکلی که برای ما قابل اندازه‌گیری است)تغییری نمی‌کند و به نوع دیگری از انرژی تبدیل نمی‌گردد.ولی در فرآیندها و برخوردهایی که این انرژی (حداقل از دیدگاه ما) تغییر می‌کند و کاهش می‌یابد، لابد به نوعی دیگری تبدیل شده و ظاهر می‌گردد. این نوع دیگر در بسیاری از موارد گرماست. مثلاً کار نیروی اصطکاک که عموماً منفی است، به گرما تبدیل می‌شود. اما هرگز فراموش نکنید که قاعدهٔ بقای اندازه‌حرکت در همهٔ انواع برخوردها برقرار است. یعنی همواره تغییر اندازه‌حرکت برابر است با ضربهٔ ناشی از نیروهای خارجی که اگر برآیند آنها صفر باشند لذا ضربهٔ آنها نیز صفر شده و لذا اندازه‌حرکتِ کل پیش از برخورد و پس از آن یکسان باقی می‌ماند.